Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Examen de Análisis Matemático I – septiembre 2014

1. Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto no vacío. Prueba que hay elementos $a \in K$, $b \in K$ tales que $\operatorname{diam}(K) = \mathrm{d}(a, b)$.

2. Estudia si el campo escalar definido por:
$$f(x, y) = xy\frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$
es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

3. Clasifica los puntos críticos del campo escalar
$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1$$
y calcula sus extremos absolutos en la bola euclídea $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$.

4. Prueba que las igualdades:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x\,\mathrm{e}^v + yu - u^2 & = & 0 \\ y\cos v + x^2 - u^2 & = & 1 \end{array}\right.$$
definen a u y a v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(2, 1)$ siendo $u(2, 1) = 2$, $v(2, 1) = 0$. Calcula las derivadas parciales $D_{11}u(2, 1)$ y $D_{12}v(2, 1)$.

5. Elegir uno de los temas:

   a) Teorema de Riesz (compacidad en espacios normados y finito dimensionalidad).

   b) Teorema de la función implícita.

Granada, 8 de septiembre de 2014